研究ノート

有限期間の最適化問題小考

A Note on Finite-Periond Optimization Problems

安木　新一郎
YASUKI Shinichiro

要旨
　最適化問題において、オイラー方程式を満たしているからといって、その解が最適解であるとは言えない。無限期間について論じる中で３期間のような有限期間を例にとることはできない。

キーワード　定量的マクロ経済学　最適化問題　オイラー方程式

はじめに

池田太郎氏より池田（2019）をいただいた。そこでは定量的マクロ経済学の最適化問題に関し、最適解の必要条件であるオイラー方程式について議論されている。以下では、池田氏の所説を検討することで、有限期間と無限期間を混同して議論することの危険性について考える。

なお、最適化問題の解説としては、現在『経済セミナー』誌で「定量的マクロ経済学と数値計算」が連載中であり参照した。

１．２期間の最適化問題

全体として$\bar{x}$単位の消費可能な財があるとして、これを 2 期間かけて消費するとする。この時、各期にどれだけ消費を割り当てるのかを考える。この問題は簡略化して、

$$\max_{(c_0,c_1)} u(c_0)+\beta u(c_1) \qquad (1)$$
$$\text{subject to } c_0+c_1\leq \bar{x}$$
$$c_0\geq 0$$
$$c_1\geq 0$$

のように書ける。ここで u は効用関数、c_0とc_1はそれぞれ 0 期と 1 期の消費量を表す。β は割引因子として、1 期の消費から得られる効用については β だけ割り引くものとする（ただし、有限期間なので β は 1 より大きくてもよい。無限期間であれば$0<\beta<1$ とする）。

（1）の解(c_0^*,c_1^*)が内点解だと仮定すれば、クーン＝タッカー必要条件より、

$$u'(c_0^*)=\lambda$$
$$\beta u'(c_1^*)=\lambda$$

が成立している（ただし λ はラグランジュの未定乗数）。よって、

$$u'(c_0^*) = \beta u'(c_1^*) \qquad (2)$$
$$c_0^* + c_1^* = \bar{x}$$

を解けば解が得られる。

さて、(2) を変形すると、

$$\frac{\beta u'(c_1^*)}{u'(c_0^*)} = 1$$

であり、クーン＝タッカー必要条件が 0 期と 1 期の消費の限界効用の比と価格比が等しくなるという 1 階条件であることが確認できる。この (2) が定量的マクロ経済学でいうところのオイラー方程式である。

上記 2 期間と同じように、今度は全体として$\bar{x}$単位の消費可能な財を T 期間かけて消費するとする。各期に割り当てられる消費量は、

$$-\beta^{t-1}u'(c_{t-1}^*) + \beta^t u'(c_t^*) = 0, \quad t = 1,2,\ldots,T-1$$
$$c_0^* + c_1^* + \cdots + c_{T-1}^* = \bar{x}$$

という連立方程式の解となる。

２．無限期間の最適化問題

有限期間については最適解があることが分かったが、無限期間になると無限個の変数と無限本の方程式が出てくるので１．で導出した連立方程式を解くことができない。とはいえ、無限期間であっても最適解がオイラー方程式を満たしていなければならないことにかわりはない。

さて、池田（2019）C.節と同じく 3 期間モデルについて考えると、必要条件たるオイラー方程式は

$$u'(c_0^*) = \beta u'(c_1^*) = \beta^2 u'(c_2^*)$$

と書ける。これを変形すると、

$$\frac{\beta u'(c_1^*)}{u'(c_0^*)} = \frac{\beta^2 u'(c_2^*)}{\beta u'(c_1^*)}$$

となり、0 期と 1 期の消費の限界効用の比と 1 期と 2 期の消費の限界効用の比が等しくなる。

池田（2019）では無限期間の最適化問題において、導出したオイラー方程式

$$\beta^t \frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} dc_t + \beta^{t+1} \frac{\partial u(c_{t+1})}{\partial c_{t+1}} dc_{t+1} = 0, \qquad \mathbf{for} \ \ \forall \boldsymbol{t} \geq \mathbf{1}.$$

がすべての t で成り立つと仮定し、3 期間モデルの終点$t = T = 3$について

$$\beta^3 \frac{\partial u(c_3)}{\partial c_3} dc_3 + \beta^4 \frac{\partial u(c_4)}{\partial c_4} dc_4 = 0$$

となっている。しかしながら、3 期間について考えているのに第 4 期がでてきてしまうので$\beta^4 \frac{\partial u(c_4)}{\partial c_4} dc_4 = 0$とすると、

$$\beta^3 \frac{\partial u(c_3)}{\partial c_3} dc_3 = 0$$

を意味する。これを第 1 期まで考えると、

$$\frac{\partial u(c_1)}{\partial c_1} dc_1 = 0$$

となり、結果的に

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} dc_t = 0, \quad \forall \boldsymbol{t} \geq \mathbf{1}.$$

つまり 1 期間の最適化条件に帰着することになってしまう。

無理やり 1 期間のオイラー方程式を書くと、$c_0^* = \bar{x}$のとき効用は最大となる。いくら期間を延ばしても第 1 期の最適化条件が成り立つのであれば、3 期間の場合、$c_1^* = c_2^* = 0$、すなわち消費量が 0 のときの効用は 0 で、つねに 2 期と 3 期の限界効用の比が$\frac{0}{0}$となり定義できない。

おわりに

最適化問題において、オイラー方程式を満たしているからといって、その解が最適解であるとは言えない。無限期間の最適化問題については、動的計画法のように有限期間の場合とは異なる解法が用いられる。無限期間について論じる中で 3 期間のような有限期間を例にとることはできないのである。

参考文献

池田太郎「動学的マクロ経済学におけるオイラー方程式に関する考察」、Kobe University Discussion Paper、1902、2019 年 2 月。

北尾早霧・砂川武貴・山田知明「定量的マクロ経済学と数値計算 1　―数値計算ことはじめ」『経済セミナー』、2018 年 12 月・2019 年 1 月、55 頁～61 頁。

北尾早霧・砂川武貴・山田知明「定量的マクロ経済学と数値計算 2　―2 期間モデルと数値計算の概観」『経済セミナー』、2019 年 1 月・2 月、106 頁～114 頁。

北尾早霧・砂川武貴・山田知明「定量的マクロ経済学と数値計算 3　―動的計画法」『経済セミナー』、2019 年 3 月・4 月、108 頁～117 頁。

Stokey, N. and Rucas, R. with Prescott,E., *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Harvard University Press, 1989.